ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

Kİ-KARE DAĞILIMI

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ rastgele değişkenleri ortalaması “0” ve varyansı “1” olan normal dağılıma sahip olsun. Bu rastgele değişkenlerin kareleri toplamı ki-kare rastgele değişkenlerini verir.

U rastgele değişkeni k serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip ise U’nun olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \,.\, u^{\frac{k}{2}-1}.\,e^{-\frac{u}{2}} & , \quad u > 0 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

şeklindedir.

- k serbestlik dereceli ki-kare dağılımı $\chi^2_{(k)}$ ile gösterilir.
- χ^2 dağılımının ortalaması k, varyansı 2k’dır.
- χ^2 dağılımının şekli serbestlik derecesine bağlıdır.
- Ki-kare dağılımı k sonsuza giderken normal dağılıma yaklaşır.
- χ^2 negatif değerler almaz. Olasılık dağılımı da sağa çarpıktır.
- k serbestlik dereceli ve α yanılma olasılığındaki χ^2 rastgele değişkeninin değeri;

$$P\left(\chi^2_{(k)} \geq \chi^2_{\alpha,k}\right) = \int_{\chi^2_{\alpha,k}}^{\infty} f(u)du = \alpha$$

dir.

T DAĞILIMI

Z rastgele değişkeni ortalaması “0” , varyansı “1” olan normal dağılıma sahip ve Y rastgele değişkeni k serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahip olsun. Z ve Y rastgele değişkenleri bağımsız ise o zaman;

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$$

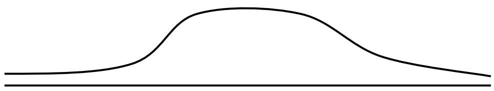
rastgele değişkeni tanımlanabilir. T rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left[\frac{k+1}{2}\right]}{\sqrt{\Pi k}\,.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{t^2}{k}\right)+1\right]^{\frac{k+1}{2}}} & ,-\infty < t < \infty \\ 0 & , \qquad dd \end{cases}$$

şeklindedir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu k serbestlik dereceli T dağılımı olarak bilinir. T dağılımının ortalaması “0” , varyansı k>2 için $\frac{k}{k-2}$ ‘ dir.

- Ki-kare dağılımı α = $\frac{k}{2}$, β = 2 olan Gamma dağılımıdır.

T dağılımı ortalamaya göre simetrik bir dağılımdır. Standart normal dağılıma benzer dağılım eğrisi, normal dağılım eğrisinden daha basıktır. k sonsuza giderken T dağılımı standart normal dağılıma yaklaşır.



P (T ≥ tα,k) = $\int_{t\alpha.k}^{\infty} f(t)dt$ = α

Bu olasılık k serbestlik dereceli α yanılma olasılığındaki rastgele değişkenin değeridir.

F DAĞILIMI

W ve Y rastgele değişkenleri sırasıyla u_1 ve u_2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip bağımsız rastgele değişkenler olsunlar.

$$X = \frac{\frac{W}{u_1}}{\frac{Y}{u_2}}$$

rastgele değişkeni u_1 ve u_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. u_1 ve u_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahip X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

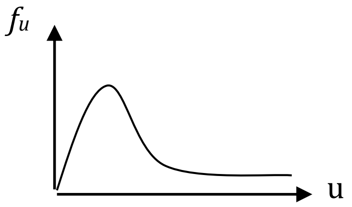
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u_1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{u_2}{2}\right)}\cdot\dfrac{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\frac{u_1}{2}}.x^{\frac{u_1}{2}-1}}{\left[\frac{u_1}{u_2}.x+1\right]^{\frac{u_1+u_2}{2}}} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad dd\end{cases}$$

F dağılımının;

Ortalaması : $\frac{u_2}{u_2-2}$, $u_2 > 2$

Varyansı : $\frac{2u_2^2.(u_1+u_2-2)}{u_1(u_2-2)^2.(u_2-4)}$, $u_2 > 4$

dir. Bu dağılım negatif değer almaz, sağa çarpık yapıdadır. F dağılımının şekli aşağıdaki gibidir.



SONUÇ

Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal bir kitleden rastgele olarak çekilen n birimlik bir örneklemin ortalaması $\bar{X}$ ve örnek varyansı S^2 olsun.

- Bu durumda $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ istatistiğinin dağılımı (n-1) serbestlik dereceli t-dağılımıdır. Yani $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$ dir.

Çünkü $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ise $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ dir. Ayrıca Y rastgele değişkeni

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Y rastgele değişkeni (n-1) serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olduğunda ve bağımsız Y ve Z rastgele değişkenleri için

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{k}}} = \frac{\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}}$$

$$= \frac{(\bar{X}-\mu)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.\frac{1}{n-1}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\frac{S}{\sigma}}$$

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$$

Buradan

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

olduğu görülür.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.